

Colles de Maths - semaine 15 - MP-MP\*  
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Exercice 1** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in ]0, +\infty[$ . On suppose qu'il existe  $z_0$  tel que  $|z_0| = R$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge. Montrer qu'alors la convergence de la série entière est uniforme sur tout ensemble de la forme

$$C_{\theta_0} = \{z_0(1 - \rho e^{i\theta}) \in D(0, R) \cup \{z_0\}, 0 \leq \rho \leq \rho_0, |\theta| \leq \theta_0\}$$

où  $0 \leq \theta_0 < \pi/2$  et  $0 \leq \rho < 2 \cos \theta_0$ .

**Exercice 2** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. On suppose que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est de rayon au moins 1 et que  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} l \in \mathbb{C}$ .

1. On suppose que  $a_n \geq 0$  pour tout  $n$ . Montrer que  $\sum a_n$  converge et que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$ .
2. On suppose que  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Montrer que  $\sum a_n$  converge et que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$ .

**Exercice 3** Développer en série entière en 0 la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt.$$

**Exercice 4** Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions polynomiales à coefficients positifs qui converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$ . Montrer qu'il existe  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs telle que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

**Exercice 5** Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1[$ .

Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha x^n}{1 - x^n}$  converge, et donner un équivalent de sa somme lorsque  $x$  tend vers 1.

*Indication :* On pourra admettre que les propriétés de l'intégrale s'étendent bien aux fonctions réglées sur un segment (c'est-à-dire admettant en tout point une limite à gauche et à droite), y compris l'approximation par les sommes de Riemann.

**Exercice 6** Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est analytique, c'est-à-dire développable en série entière en tout point de  $I$ ;
- (ii) Pour tout  $x_0 \in I$ , il existe  $\eta > 0$  et des constantes  $C, r > 0$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq Cr^n n!.$$

*Remarque :* Avec la propriété de Borel-Lebesgue, on montre en fait que (ii) est aussi équivalent à : pour tout segment  $J \subseteq I$ , il existe des constantes  $C, r > 0$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, |f^{(n)}(x)| \leq Cr^n n!$ .